۴ آزمون	ریاضی (۳)	پایهٔ دوازدهم ـ رشته: علوم تجربی	خیلی سبز!
	◀ فصل ۲: مثلثات (آزمون جامع ۲) ▶	مـدت آزمـون: ۶۰ دقیقه	

ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. ب) در تابع f هرگاه عدد حقیقی مثبتی مانند T وجود داشته باشد، به طوری که برای $x \in D_f$ داشته باشیم: $\begin{cases} x \pm T \in D_f \\ f(x \pm T) = f(x) \end{cases}$ آن‌گاه حتماً T دورهٔ تناوب f است. ج) جواب‌های معادلهٔ $\cos x = 1$ و $\sin x = 0$ با هم برابرند.	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) مقدار عددی $\sin(22/5)^\circ \cos(22/5)^\circ$ برابر با ..... است. (مشابه خرداد ۱۴۰۳) ب) جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x = \sin\alpha$ به صورت ..... و ..... است. ج) بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی برابر ..... است.	۱
۳	جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی روبه‌رو را در بازهٔ $(0,\pi)$ به دست آورید. $2\cos(2x) - \sqrt{3} = 0$ برای حل برخی از معادلات مثلثاتی، حتماً باید نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف رو حفظ باشین؛ پس یک بار دیگه نسبت‌های مثلثاتی زوایای 0°، 30°، 45°، 60°، 90°، 180°، 270°، 360° رو کامل حفظ کنید. در حل معادلات مثلثاتی، دقت کنید که باید نسبت‌های مثلثاتی رو هم‌نام کنیم؛ یعنی باید فقط سینوس یا فقط کسینوس در معادله مشاهده شود.	۱/۲۵
۴	جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x - \sin x + 2 = 2$ را به دست آورید.	۱/۵
۵	در یک تابع سینوسی، دورهٔ تناوب برابر 8π، مقدار max برابر -1 و مقدار مینیمم آن -7 است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید.	۱/۲۵
۶	یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $10\ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در فاصلهٔ ۲متری او قرار دارد، با زاویهٔ θ نسبت به سطح افقی پرتاب می‌کند. اگر رابطهٔ بین سرعت توپ مسافت طی‌شده (d برحسب متر) و زاویهٔ پرتاب (θ برحسب رادیان) به صورت $d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{25}$ باشد، زاویهٔ پرتاب چه‌قدر است؟	۱/۵
۷	اگر $\cos\alpha = \frac{10}{26}$ و α یک زاویهٔ حاده باشد، حاصل $\cos 2\alpha$ را به دست آورید.	۰/۷۵
۸	حاصل عبارت $4\sin x \cos x \cos 2x$ را به ازای $x = 15^\circ$ محاسبه کنید.	۱/۲۵
۹	تابع $y = \cos 3x$ را در نظر بگیرید. در نمودار این تابع ابتدا عرض تمام نقاط را ۲ برابر کرده و سپس نمودار حاصل را به اندازهٔ $\frac{\pi}{6}$ به سمت راست انتقال می‌دهیم. دورهٔ تناوب نمودار حاصل را به دست آورید.	۰/۷۵
	موفق باشید	جمع نمرات ۱۰

آزمون شمارهٔ ۴ (فصل دوم: جامع ۲)

۱ الف) نادرست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵)

نکته

کوچک‌ترین عدد مثبت T که خاصیت $\begin{cases} x \mp T \in D_f \\ f(x \mp T) = f(x) \end{cases}$ را داشته باشد، دورهٔ تناوب f است.

ج) نادرست (۰/۲۵) به ازای مقادیر $x = ۲k\pi$ معادلهٔ $\cos x = ۱$ و به ازای مقادیر $x = ۲k\pi$ و $x = (۲k+۱)\pi$ معادلهٔ $\sin x = ۰$ برقرار است.

۲ الف) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ (۰/۲۵)

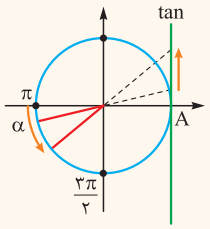
از فرمول $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin(۲۲/۵^\circ)\cos(۲۲/۵^\circ) = \frac{\sin ۴۵^\circ}{۲} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

ب) $\underbrace{x = (۲k+۱)\pi - \alpha}_{(۰/۲۵)}, \underbrace{x = ۲k\pi + \alpha}_{(۰/۲۵)}$

ج) $(۰/۲۵)\ [۰, +\infty)$

در ربع سوم زاویهٔ α از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ افزایش پیدا می‌کند و هر چه α به $\frac{۳\pi}{۲}$ میل پیدا کند، مقدار $\tan\alpha$ به $+\infty$ نزدیک‌تر می‌شود؛ پس می‌توان نوشت مقدار $\tan\alpha$ در ربع سوم از صفر تا $+\infty$ افزایش پیدا می‌کند.



۳
$$۲\cos(۲x) = \sqrt{۳} \Rightarrow \cos(۲x) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \cos(۲x) = \cos\frac{\pi}{۶} \ (۰/۲۵)$$

$$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \ (۰/۲۵) \\ ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \ (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$\underbrace{x = \frac{\pi}{۱۲}, \frac{۱۱\pi}{۱۲} \in (۰, \pi)}_{(۰/۵)}$$

۴
$$\cos ۲x - \sin x + ۲ = ۲ \Rightarrow \cos ۲x - \sin x + ۲ - ۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x} ۱ - ۲\sin^۲ x - \sin x = ۰ \ (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را در منفی ضرب می‌کنیم.}} ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\sin x = t} ۲t^۲ + t - ۱ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t = -۱ \\ t = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t = \sin x} \begin{cases} \sin x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \ (۰/۲۵) \\ \underbrace{\sin x = \frac{۱}{۲}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\sin x = \sin\frac{\pi}{۶}}_{(۰/۲۵)} \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \ (۰/۲۵) \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \ (۰/۲۵) \end{cases} \end{cases}$$

۵ در توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ روابط زیر برقرارند:

$$\begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{۲} \Rightarrow |a| = \frac{-۱-(-۷)}{۲} = ۳ \Rightarrow a = \pm ۳ \ (۰/۲۵) \\ c = \frac{\max + \min}{۲} \Rightarrow c = \frac{(-۱)+(-۷)}{۲} = -۴ \ (۰/۲۵) \\ |b| = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۸\pi} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۴} \ (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$y = a\sin(bx) + c \Rightarrow \underbrace{y = \pm ۳\sin(\pm\frac{۱}{۴}x) - ۴}_{(۰/۵)}$$

۶ مقادیر d و V در متن سؤال داده شده است؛ پس آن‌ها را در فرمول $d = \frac{v^۲\sin ۲\theta}{۲۵}$ جای‌گذاری می‌کنیم تا به یک معادلهٔ مثلثاتی برسیم.

$$۲ = \frac{۱۰^۲}{۲۵}\sin ۲\theta \ (۰/۲۵) \Rightarrow ۲ = ۴\sin ۲\theta \Rightarrow \sin ۲\theta = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \ (۰/۲۵)$$

$$\begin{cases} \underbrace{۲\theta = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \theta = k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=۰} \theta = \frac{\pi}{۱۲} \ (۰/۲۵) \\ \underbrace{۲\theta = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \theta = k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=۰} \theta = \frac{۵\pi}{۱۲} \ (۰/۲۵) \end{cases}$$

۷
$$\underbrace{\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{۲(\frac{۱۰}{۲۶})^۲ - ۱ = \frac{۲۰۰}{۶۷۶} - ۱}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{-\frac{۴۷۶}{۶۷۶}}_{(۰/۲۵)}$$

۸
$$۴\sin x\cos x\cos ۲x = ۲(۲\sin x\cos x\cos ۲x) \ (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{۲\sin x\cos x = \sin ۲x} ۲\sin ۲x\cos ۲x \ (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow[\alpha = ۲x]{۲\sin\alpha\cos\alpha = \sin ۲\alpha} \sin ۲(۲x) = \sin ۴x \ (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{x = ۱۵^\circ} \sin ۴(۱۵^\circ) = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \ (۰/۵)$$

۹ اگر عرض نقاط تابعی در یک عدد ضرب شود و یا نموداری را به چپ و راست یا بالا و پایین منتقل کنیم، دورهٔ تناوب هیچ تغییری نمی‌کند. (۰/۲۵)

$$T = \underbrace{\frac{۲\pi}{|b|}}_{(۰/۲۵)} = \frac{۲\pi}{۳} \ (۰/۲۵)$$